Série n° 6

– Formule de Taylor et Extremums –

Exercice 1

1°) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a fonction définie par :

$$f(x, y, z) = x^3y + x^2 - y^2 - x^4 + z^5$$

Après vérification de la validité du théorème de Schwarz, calculer la matrice hessienne de f.

---

correction. Ex 1 La fonction admet 3 dérivées d'ordre 1 par rapport à ses 3 variables, alors :

$$\nabla f(x, y, z) = (\partial_x f(x, y, z), \partial_y f(x, y, z), \partial_z f(x, y, z)) = (3x^2y + 2x - 4x^3, x^3 - 2y, 5z^4)$$

La fonction f admet $9 = 3^2$ dérivées d'ordre 2 alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = 6xy + 2 - 12x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) = -2; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) = 20z^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) = 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) = 0$$

Toutes les dérivées croisées sont égales. En fait le théorème de Schwarz dit que si f est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ alors la dérivation à l'ordre 2 ne depend pas de l'ordre dans lequel elle se fait. Sous les hypothèses du théorème de Schwartz la matrice hessienne est symétrique car $\partial_{x_i,x_j} = \partial_{x_j,x_i}$.
Donc

$$\mathcal{H}_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, z) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y, z) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6xy + 2 - 12x^2 & 3x^2 & 0 \\ 3x^2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 20z^3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a fonction définie par :

$$f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$$

Ecrire le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f au voisinage du point $(0, 0)$.

CORRECTION.Ex 2

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de $(0, 0)$ et son développement de Taylor d'ordre 2 est donné par :

$$f(x, y) = f(0, 0) + \nabla f(0, 0) + (x, y)\mathcal{H}_f(0, 0)(x, y)^t + o(x^2 + y^2)$$

on a

$$\nabla f(x, y) = (\cos x \sin y, \sin x \cos y)$$

alors $\nabla f(0,0)=(0,0)$, la partie d'ordre 1 du développement est nulle.
et on a

$$\mathcal{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix} -\sin x\sin y & \cos x\cos y \\ \cos x\cos y & -\sin x\sin y \end{pmatrix}$$

Alors

$$\mathcal{H}_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La partie d'ordre 2 est donnée par :

$$(x,y)\mathcal{H}_f(0,0)(x,y)^t=(x,y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}(x,y)^t=(x,y)(y,x)=2xy$$

Donc

$$f(x,y)=xy+o(x^2+y^2)$$

Exercice 3 Trouver les points critiques et discuter leur nature pour $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.

1. $$f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$$
2. $$f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$$
3. $$f(x,y)=y^2+xy\ln(x)$$
4. $$f(x,y)=(y^2-x^2)e^{(-x^2-y^2)}$$

CORRECTION.3

Toutes les fonctions 1;2,3 et 4 sont de classe $\mathcal{C}^2$ dans ses domaines de définition parce que elles sont composition de fonctions $\mathcal{C}^2$ ou des polynômes.

1- Soit $f(x,y)=(x-1)^2+2y^2$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y)=(2x-2,4y)$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y)=0 \\ \partial_y f(x,y)=0 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{cases} 2x-2=0 \\ 4y=0 \end{cases}$$

La seule solution du système est donnée par le point $A(1,0)$

On calcule la matrice hessienne :

$$\mathcal{H}_f(x,y)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La matrice hessienne est constante alors :

$$\mathcal{H}_f(1,0)=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

D'aprés les notations de Monge :on a

$$r = 2, \quad s = 0, \quad \text{et} \quad t = 4$$

alors

$$\Delta = s^2 - rt = -8 < 0$$

comme $\Delta < 0$ et $r = 2 > 0$ Alors A est un point de minimum pour f.

2- Soit $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = ((x^2 - 2y^2 + 2x)e^{x-y}, (-x^2 + 2y^2 - 4y)e^{x-y})$$

Puisque l'exponentielle est strictement > 0

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

Les deux points critiques sont $A_0 = (0, 0)$ et $A_1 = (-4, -2)$

$$\mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} (x^2 - 2y^2 + 4x + 2)e^{x-y} & (-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)e^{x-y} \\ (-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)e^{x-y} & (x^2 - 2y^2 + 8y - 4)e^{x-y} \end{pmatrix}$$

Pour A_0 on trouve:

$$\mathcal{H}_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

D'aprés les notations de Monge :on a

$$r = 2, \quad s = 0, \quad \text{et} \quad t = -4$$

alors

$$\Delta = s^2 - rt = 8 > 0$$

comme $\Delta > 0$ donc A_0 est un point -selle pour f.

Pour A_1 on trouve:

$$\mathcal{H}_f(-4, -2) = \begin{pmatrix} -6e^{-2} & 8e^{-2} \\ 8e^{-2} & -12e^{-2} \end{pmatrix}$$

D'aprés les notations de Monge :on a

$$r = -6e^{-2}, \quad s = 8e^{-2}, \quad \text{et} \quad t = -12e^{-2}$$

alors

$$\Delta = s^2 - rt = -8e^{-4} < 0$$

comme $\Delta > 0$ et $r < 0$ Alors A_1 est un point de maximum pour f.

3- Soit $f(x, y) = y^2 + xy\ln(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0\}$$

. Points critiques : On calcule le gradient :

$$\nabla f(x, y) = (y\ln(x) + y, 2y + x\ln(x))$$

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} y\ln(x) + y = 0 \\ 2y + x\ln(x) = 0 \end{cases}$$

Les deux points critiques sont $A_1 = (1, 0)$ et $A_2 = (\frac{1}{e}, \frac{1}{2e})$

On calcule la matrice hessienne :

$$\mathcal{H}_f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x} & \ln(x)+1 \\ \ln(x)+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Nature des points critiques
-Pour A_1 on trouve:

$$\mathcal{H}_f(1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

D'aprés les notations de Monge :on a

$$r = 0, \quad s = 1, \quad \text{et} \quad t = 2$$

alors

$$\Delta = s^2 - rt = 1 > 0$$

comme $\Delta > 0$ donc A_1 est un point -selle pour f.

- Pour A_1 on trouve:

$$\mathcal{H}_f(\frac{1}{e}, \frac{1}{2e}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

D'aprés les notations de Monge :on a

$$r = \frac{1}{2}, \quad s = 0, \quad \text{et} \quad t = 2$$

alors

$$\Delta = s^2 - rt = -1 < 0$$

comme $\Delta > 0$ et $r > 0$ Alors A_1 est un point de minimum pour f.

4- Soit $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2-y^2)}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. On calcule le gradient :

$$\nabla f(x,y) = (2x(-1+x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}, 2y(1+x^2-y^2)e^{-x^2-y^2})$$

Puisque l'exponentielle est strictement > 0

On cherche les points critiques comme solutions du système :

$$\begin{cases} 2x(-1+x^2-y^2 = 0 \\ 2y(1+x^2-y^2 = 0 \end{cases}$$

Les 5 points critiques:
Alors

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (x,y) \in \{(0,0); (0,1); (0,-1); (1,0); (-1,0)\}.$$

Étudions maintenant séparément chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :
D'aprés les notations de Monge:

$$r = \partial_{xx}f(x,y) = -2(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2y^2)e^{-x^2-y^2}$$
$$s = \partial_{xy}f(x,y) = -4xy(x^2-y^2)e^{-x^2-y^2} = \partial_{yx}f(x,y)$$

$$t = \partial_{yy}f(x,y) = -2(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2y^2 - 2y^4)e^{-x^2-y^2}$$
$$\Delta = s^2 - rt$$

On a alors

(x_0, y_0)	$r = \partial_{xx}f(x_0, y_0)$	$s = \partial_{xy}f(x_0, y_0)$	$t = \partial_{yy}f(x_0, y_0)$	$\Delta = s^2 - rt$	conclusion
(0,0)	-2	0	2	4	c'est un POINT DE SELLE
(1,0)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$-\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
(-1,0)	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$-\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
(0,1)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$-\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
(0,-1)	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$-\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX

Exercice 4 On considère l'équation

$$x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin(z) = 0$$

1°) Vérifier qu'elle définie une et une seule fonction $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $(0, 0, 0)$.
2°) Montrer que le point $(0, 0)$ est un point stationnaire pour $z = \varphi(x, y)$) et en établir sa nature

---

CORRECTION.4
1°) Soit
$$f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin(z)$$
Elle est de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et on a

$$\partial_x f(x, y, z) = 2x; \qquad \partial_y f(x, y, z) = 8y + 8y^3; \quad \text{et} \quad \partial_z f(x, y, z) = 2z + \cos(z)$$

$$\partial_x f(0, 0, 0) = 0; \qquad \partial_y f(0, 0, 0) = 0; \quad \text{et} \quad \partial_z f(0, 0, 0) = 1$$

Comme $\partial_z f(0, 0, 0) \neq 0$ on peut conclure que l'équation $f(x, y, z) = 0$ définie implicitement une et une seule fonction $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $(0, 0, 0)$ et $\varphi(0, 0) = 0$

2°)On a:

$$\partial_x\varphi(x, y) = -\frac{\partial_x f(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))} = -\frac{2x}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} \qquad \partial_x\varphi(0, 0) = 0$$

$$\partial_y\varphi(x, y) = -\frac{\partial_y f(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))} = -\frac{8y + 8y^3}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} \qquad \partial_y\varphi(0, 0) = 0$$

donc $(0, 0)$ est un point stationnaire pour $z = \varphi(x, y)$.
D'aprés les notations de Monge:

$$\partial_{xx}\varphi(x, y) = \frac{-2}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} + 2x\frac{\partial_x\varphi(x, y)[2 - \sin(\varphi(x, y))}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2} \qquad \partial_{xx}\varphi(0, 0) = -2 = r$$

$$\partial_{xy}\varphi(x, y) = 2x\frac{\partial_y\varphi(x, y)(2 - \sin(\varphi(x, y))}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2} = \partial_{yx}\varphi(x, y) \qquad \partial_{xx}\varphi(0, 0) = 0 = s$$

$$\partial_{yy}\varphi(x, y) = \frac{-8(1 + 3y^2)}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} + 8(y + y^3)\frac{\partial_y\varphi(x, y)[2 - \sin(\varphi(x, y))}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2} \qquad \partial_{yy}\varphi(0, 0) = -8 = t$$

Alors
$$\Delta = s^2 - rt = -16 < 0 \quad \text{et comme} \quad r < 0$$
Donc le point $(0, 0)$ est un point de maximum locale pour la fonction $z = \varphi(x, y)$

Exercice 5 Soit la fonction f définie par:

$$f(x,y) = xe^y + ye^x$$

1°) Donner le domaine de définition D_f de f.
On admet que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur D_f .
2°) Calculer les dérivées partielles premières de f en tout point de D_f .
3°) Déterminer l'équation du plan tangent à la surface représentative de f au point $(0,0)$.
4°) Calculer la matrice Héssienne de f au point $(0,0)$
5°) Donner une valeur approchée de $f(0.1, -0.2)$.

CORRECTION.5
Soit la fonction f définie par:

$$f(x,y) = xe^y + ye^x$$

1°) f est définie sur $\mathbb{R}^2$
2°) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y + ye^x, \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xe^y + e^x$$

3°) L'équation du plan tangent au point $(0,0)$ est donnée par:

$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) = x + y$$

4°) comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $D_f = \mathbb{R}^2$ alors.
On calcule les dérivées partielles secondes :$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ on a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = ye^x, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = e^y + e^x = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = xe^y$$

Donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$$

Alors la matrice Héssienne de f au point $(0,0)$ est:

$$\mathcal{H}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

5°) L'approximation affine au voisinage de $O = (0,0)$ est donnée par $\tilde{f}_O(x,y) = x + y$ d'aprés la question 3 (le plan tangent étant la surface représentative de l'approximation affine). Ainsi

$$f(0.1, -0.2) \simeq \tilde{f}_O(0,0) = 0.1 - 0.2 = -0.1$$

.